EPFL

A

Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN MIDTERM – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2025-2026

DURÉE :1H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouges et verts sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 50 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 50 points
  - *Page 2*

QUESTION 1 *(50 points)*

Le système de la Figure 1.1 se compose d'une tige rigide sans masse de longueur L, et d'une masse ponctuelle m. La tige est reliée au mur par un ressort k et un amortisseur c. Dans ce système la gravité g est verticale et dirigée vers le bas. On considère toujours que la barre tourne $\theta \ll 1$.

- **i) Combien de DdL a le système .... (2 pts)**
- **ii) Écrire les énergies potentielle et cinétique du système .... (12 pts)**
- **iii) Écrire l'équation de mouvement du système .... (6 pts)**
- **iv) Trouver la valeur de la pulsation propre si $c = 0$ .... (4 pts)**
- **v) Comment appelle-t-on cette pulsation ? .... (2 pts)**
- **vi) Trouver la valeur de L telle que cette pulsation du (iv) soit la moitié que la pulsation dans le cas où $g = 0$ .... (4 pts)**
- **vii) Avec cette valeur de L, pour quelles valeurs de c le système est-il sous-amorti ? ... (4 pts)**
- **viii) Dans ce cas, trouver la valeur de la pulsation propre .... (4 pts)**
- **ix) Comment appelle-t-on cette pulsation ? .... (2 pts)**
- **x) Décrire le mouvement de la masse (en précisant les équations) lorsque la masse a une vitesse initiale $v(t = 0) = v_0$, et que $\eta < 1$. .... (10 pts)**

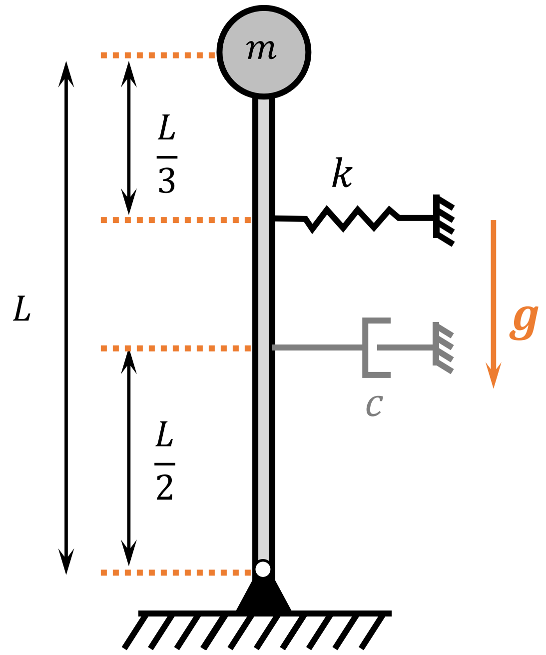

Figure 1.1 | Résonateur amorti.

Solutions

(i) 1 DdL

(ii)

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$
$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3} l x\right)^2 + mgl\cos(\theta) \approx \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3} l x\right)^2 + mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

(iii)

$$ml^2\ddot{\theta} + \frac{4}{9} k l^2 x - mgl\theta = 0 \rightarrow si\ c = 0$$

Pour rajouter l'amortissement, on peut utiliser bien la fonction W apprise en dynamical systems, ou bien on prend l'équation que l'on vient d'écrire et on rajoute le moment de la force de l'amortisseur :

$$ml^2\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + \frac{4}{9} k l^2 x - mgl\theta = 0 \rightarrow si\ c = 0$$

(iv)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{4}{9} k l^2 - mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{4}{9}\frac{k}{m} - \frac{g}{l}}$$

(v) Cela est la pulsation propre du système conservatif et on l'appelle ω_0.

(vi) La gravité va réduire la valeur de cette pulsation.

$$\omega_0(g) = \frac{1}{2}\omega_0(g=0) \rightarrow \sqrt{\frac{4}{9}\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}\frac{k}{m}} \rightarrow l = \frac{3mg}{k}$$

(vii) Définition de sous-amorti : $\eta < 1$. Alors on écrit

$$\eta = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_0} = \frac{\frac{c}{4}}{2m\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{3}{8}\frac{c}{\sqrt{km}} \rightarrow c < \frac{8}{3}\sqrt{km}$$

(viii)

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\eta^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\frac{c}{\sqrt{km}}\right)^2}$$

(ix) Ceci est la pulsation propre du système dissipative et on l'appelle ω_1

(x) La masse bougera de manière quasi-périodique avec une décroissance exponentielle de l'amplitude :

$$\theta(t) = \Theta \cdot e^{-\lambda t}\cos(\omega_1 t - \varphi)$$
$$\theta(t=0) = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{l} = \Theta\omega_1 \rightarrow \Theta = \frac{v_0}{l\omega_1}$$
$$\theta(t) = \frac{v_0}{l\omega_1} e^{-\frac{c}{8m}t}\sin(\omega_1 t)$$

QUESTION 2 *(50 points)*

Le système de la Figure 2.1 se compose d'un cylindre de masse M et de rayon R, et d'une masse ponctuelle m. Chaque masse est reliée au mur par un ressort, de constantes k et k_3 respectivement. De plus, la masse ponctuelle est reliée à un second mur en utilisant le cylindre comme poulie par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_2. Dans ce système *sans gravité* le cylindre se déplace sans glissement. On considère toujours que $\theta \ll 1$.

- **i) Combien de DdL a le système .... (2 pts)**
- **ii) Écrire les énergies potentielle et cinétique du système .... (18 pts)**
- **iii) Écrire les équations de mouvement du système .... (8 pts)**
- **iv) Écrire les matrices de masse et de rigidité .... (4 pts)**
- **v) Trouver les valeurs de M, k_3, k_2 afin de rendre ce système symétrique .... (4 pts)**
- **vi) Dans ce cas, trouver les modes propres du système. Faire un dessin pour illustrer. (6 pts)**
- **vii) Dans ce cas, trouver les fréquences/pulsations propres du système .... (4 pts)**
- **viii) Trouver des conditions initiales afin que le système oscille à ω_I .... (4 pts)**

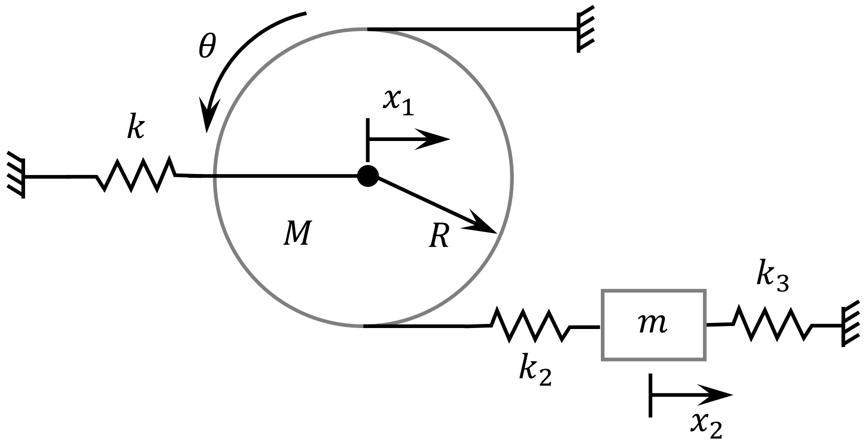

Figure 2.1 | Schéma du système.

Solutions

(i) 2 DdL

(ii)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - 2x_1)^2$$

(iii)

$$x_1 \to \frac{3}{2}M\ddot{x}_1 + kx_1 + k_2(x_2 - 2x_1)(-2) = \frac{3}{2}M\ddot{x}_1 + (k + 4k_2)x_1 - 2k_2x_2 = 0$$

$$x_2 \to m\ddot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - 2x_1) = m\ddot{x}_2 + (k_3 + k_2)x_2 - 2k_2x_1 = 0$$

(iv)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix};\ \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k + 4k_2 & -2k_2 \\ -2k_2 & k_3 + k_2 \end{pmatrix}$$

(v) Pour avoir un système symétrique :

$$m = \frac{3}{2}M \to M = \frac{2}{3}m$$

$$k + 4k_2 = k_3 + k_2 \to k_3 = k + 3k_2$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix};\ \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k + 4k_2 & -2k_2 \\ -2k_2 & k + 4k_2 \end{pmatrix}$$

(vi) Pour les modes propres du système, comme c'est symétrique :

$$\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(vii) Pour les pulsations propres du système on peut vite voir que :

$$\omega_I^2 = \frac{k + 2k_2}{m};\ \omega_{II}^2 = \frac{k + 6k_2}{m};$$

(viii) Possibles conditions initales :

$$\vec{x}(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}m;\ \dot{\vec{x}}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{m}{s};$$